

# Análisis de las deflexiones y tensiones en estructuras esbeltas de barras ante cargas laterales antisimétricas

*Analytical deflections and stress analysis in slender bar framed structures subjected to antisymmetric lateral loads*

Daniel Rodríguez-Jorge, Ignacio Herrera-Navarro  
 Universidad de Extremadura.  
 Escuela de Ingenierías Industriales (España)

DOI: <https://doi.org/10.6036/10869>

## 1. INTRODUCCIÓN

La altura cada vez mayor de los edificios modernos y su esbeltez es posible en parte gracias a los avances en las técnicas de construcción, que permiten disponer de múltiples opciones, como pórticos rígidos, muros cortantes o estructuras voladizas, entre otras. Las tendencias y perspectivas actuales a este respecto se revisaron, por ejemplo, en [1]. Las cargas a las que se verá sometida la estructura influirán directamente en su diseño y respuesta mecánica. Así, analizar el comportamiento de las estructuras bajo un determinado tipo de carga es crucial a la hora de predecir el comportamiento dinámico de

dichos sistemas y optimizar su diseño, así como garantizar la seguridad, principal preocupación en Ingeniería Civil [2] y de Estructuras. En [3] se introdujo un método simplificado para estudiar los desplazamientos de edificios de gran altura sometidos a cargas transversales uniformes. En [4] también se propuso un modelo analítico para estructuras de muros de gran altura mediante el enfoque de medio continuo. El método de las fuerzas, sin embargo, permite un enfoque más general cuando se trata de estudiar estructuras de múltiples geometrías, tales como edificios altos o bajos, estructuras de vigas como torres de comunicaciones o grúas torre, etc. El método de las fuerzas se ha utilizado recientemente para estudiar estructuras de edificios en condiciones elásticas y elastoplásticas, como en [5], y para enfoques innovadores como el reanálisis estructural [6]. En [7] se estudian estructuras con elementos de tipo celo-

sía y armazón mediante el método de las fuerzas, y se concluye que dicho método da lugar a estructuras más ligeras cuando se utiliza en esquemas de optimización. Y aunque es más difícil de automatizar [8], los métodos híbridos pueden ayudar a que sea más viable que con el método de desplazamiento más comúnmente utilizado [8]. En este trabajo, se introduce un procedimiento adimensional basado en el método de las fuerzas para proporcionar la solución exacta para estructuras ante cualquier tipo de carga transversal de variación potencial e independientemente de la altura o incluso de la esbeltez del edificio. Dicha solución está orientada a la optimización de estructuras de barras y edificios, proporcionando las expresiones exactas para el desplazamiento lateral, las tensiones y los momentos flectores. Este último es un tema de estudio habitual y en [9] se publicó una aproximación basada en el método de las fuerzas. Todas las variables relevantes en el problema serán identificadas y cuantificadas en cuanto a su influencia en la solución. Se obtendrá una expresión exacta general para el desplazamiento lateral de cada uno de los niveles del edificio y se resolverá simbólicamente utilizando fuerzas virtuales, junto con la distribución de esfuerzos máximos.

## 2. MÉTODOS Y MATERIALES

En la Fig. 1a se muestra una estructura de barras general simplificada, indicando su altura  $H$ , su longitud de base  $L$  y su profundidad  $a$ , con  $n$  vigas/forjados caracterizados por su módulo de Young  $E_f$ , área de sección transversal  $A_f$ , sección reducida  $\Omega_{ff}$  y momento de inercia transversal  $I_f$ . A ambos lados se muestran dos conjuntos de columnas/pantallas con módulo de Young  $E_c$ , área de sección transversal  $A_c$ , área reducida  $\Omega_{fc}$  y momento de inercia  $I_c$ .  $h_i$  representa la altura entre los niveles consecutivos  $i$  e  $i - 1$  (no necesariamente iguales), mientras que  $s$  indica la distancia vertical desde cualquier punto hasta la parte superior, siendo  $s_i$  la distancia vertical desde el nivel  $i$  hasta la parte superior.  $p(s)$  es la intensidad de la carga transversal que actúa sobre ambas paredes laterales.

La Fig. 1 (b) muestra el sistema principal elegido para aplicar el método de las fuerzas. Para que el sistema principal sea

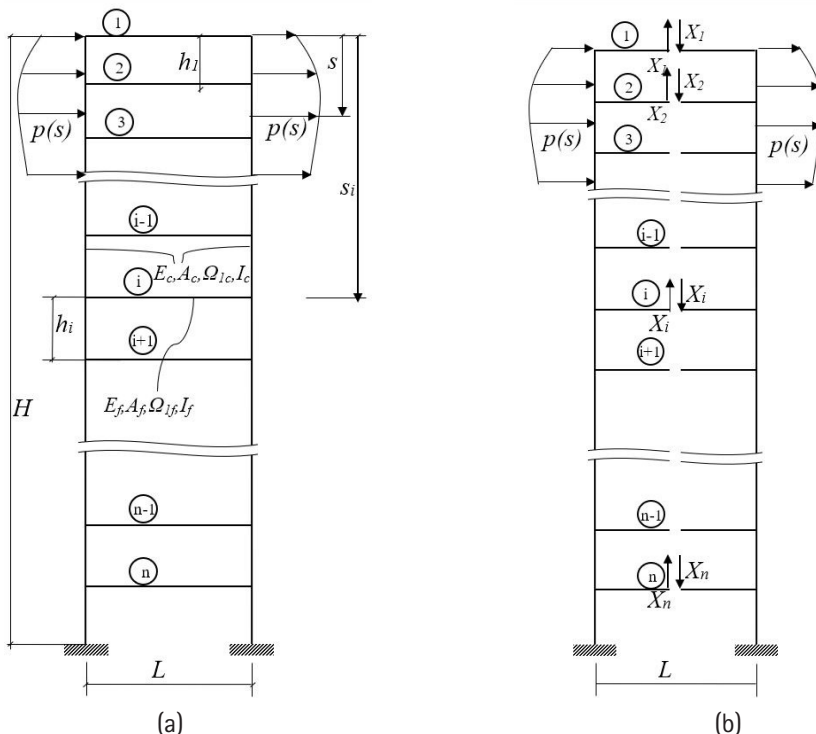


Fig. 1. Esquema de la estructura enmarcada. (a) Esquema y parámetros estructurales involucrados, incluyendo datos de vigas y columnas, así como las fuerzas aplicadas a la estructura. (b) Sistema principal incluyendo sólo las variables hiperestáticas  $X_i$ .

equivalente a la estructura real, las condiciones de compatibilidad deben elegirse de modo que el desplazamiento vertical relativo entre la sección media de cada nivel, entre el lado derecho y el izquierdo de la sección media de cada nivel, sea cero:

$$\forall i = 1, \dots, i, \dots, n: \delta_i = 0 \leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} X_j + \delta_{ip}) = 0 \quad (1)$$

En la Ecuación 1,  $X_j$  representa cada una de las variables hiperestáticas desconocidas representadas en la Fig. 1 y  $\delta_{ij}$  es el desplazamiento del punto  $i$  en la dirección  $X_j$  cuando sólo se aplica una fuerza unitaria en dicha dirección.  $\delta_{ip}$  es el desplazamiento del punto  $i$  en la dirección  $X_j$  cuando sólo la carga  $p(s)$  actúa sobre la estructura. Definiendo ahora los siguientes parámetros adimensionales:

$$X_j^* = \frac{X_j}{p_{max} L}; \delta_{ip}^* = \delta_{ip} \frac{E_c L_c}{p_{max} L^4}; \delta_{ij}^* = \delta_{ij} \frac{E_c L_c}{L^3} \quad (2)$$

La ecuación 1 puede reescribirse como

$$\forall i = 1, \dots, i, \dots, n: \delta_i^* = 0 \leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\delta_{ij}^* X_j^* + \delta_{ip}^*) = 0 \quad (3)$$

Los desplazamientos adimensionales  $\delta_{ip}^*$  pueden calcularse fácilmente sabiendo que las tensiones en nivel en la estructura principal son funciones nulas:

$$\delta_{ip}^* = \frac{E_c L_c}{p_{max} L^4} \left( \int_0^H \frac{M_p M_i}{E_c L_c} ds + \int_0^H \frac{T_p T_i}{G \Omega_c L_c} ds + \int_0^H \frac{N_p N_i}{E_c A_c} ds \right) = \frac{1}{p_{max} L^4} \int_0^H p(x)(s-x) dx \quad (4)$$

donde  $N_p$ ,  $T_p$ , y  $M_p$  representan las fuerzas axil y cortante y el momento flector en la estructura principal bajo la carga  $p(s)$ ,  $N_i$ ,  $T_i$ , y  $M_i$  son los mismos cuando la estructura principal sólo está bajo las fuerzas  $X_i$ , y  $p_{max}$  es la intensidad máxima de la carga genérica  $p(s)$ .

Los dos últimos términos de la primera Ec. en 4, correspondientes a las tensiones cortantes y axiales, son cero. Lo mismo puede aplicarse para obtener  $\delta_{ij}^*$ :

$$\delta_{ij}^* = \begin{cases} i \neq j; \left( \frac{1}{2} + 2 \frac{L_c}{A_c L^2} \right) \sum_{k=\max(i,j)}^n \frac{h_k}{L} \\ i = j; \frac{1}{12} \frac{E_c L_c}{E_f I_f} + \frac{E_c L_c}{G \Omega_c L^2} \left( \frac{1}{2} + 2 \frac{L_c}{A_c L^2} \right) \sum_{k=i}^n \frac{h_k}{L} \end{cases} \quad (5)$$

En general, si se sabe que una carga antisimétrica  $p(s)$  actúa sobre la estructura, entonces puede dividirse en dos cargas iguales actuando en cada lado, como en la Ecuación 6. Por simplicidad, para el análisis adimensional sólo se considerarán las cargas transversales de tipo potencial como la de 6. En la parte superior de la estructura,  $p_{max} = p(0)$ .

$$p(s) = \frac{p_{max}}{2} \left( 1 - \frac{s}{H} \right)^{2\beta} \quad (6)$$

donde  $\beta$  es el exponente de carga que define la distribución de la carga. Esta carga debe actuar por igual en el lado izquierdo y derecho de la estructura. Se

considera una carga uniforme cuando  $\beta$  es cero, mientras que si es 1, se modela una fuerza lateral lineal creciente con la altura. Suponemos que la expresión 6 es válida desde  $s = 0$  hasta  $s = H$ . El valor correspondiente de  $\delta_{ip}^*$  es:

$$\delta_{ip}^* = -\frac{H^3}{2L^3} t_i \left( \frac{1}{2\beta+2} - \frac{1}{2\beta+1} \frac{t_i}{2} + \left( \frac{1}{2\beta+1} - \frac{1}{2\beta+2} \right) \frac{t_i^{2\beta+2}}{2\beta+3} \right) \quad (7)$$

donde  $t_i = 1 - (s_i/H)$  y, como se muestra en la Fig. 1,  $s_i = h_1 + \dots + h_{i-1}$  para  $i > 1$  y  $s_1 = 0$ . Una vez resuelta la Ec. 3, se conocen todas las componentes de fuerza y momento en cada elemento de la estructura, y se tiene:

$$N^* = \frac{N_p}{p_{max} L} + \sum_{i=1}^n X_i^* N_i; T^* = \frac{T_p}{p_{max} L} + \sum_{i=1}^n X_i^* T_i; M^* = \frac{M_p}{p_{max} L} + \sum_{i=1}^n X_i^* M_i \quad (8)$$

En la Ecuación 8,  $N^*$ ,  $T^*$  (adimensional), y  $M^*$  (en metros) representan la fuerza axil y cortante y el momento flector respectivamente en la estructura dada. Las tensiones también pueden obtenerse si se supone que las vigas que conforman los niveles están sometidas a esfuerzos de flexión y los pilares a flexión más pandeo:

$$\frac{\sigma_{max,f}}{E} = \frac{p_{max} L^2 M_{max,f}}{E I_f} \gamma_{max,f} = \frac{p_{max} L^2 \cdot \max(|X_i^*|)}{2 E I_f} \gamma_{max,f} = \frac{p_{max} L^3 \cdot \max(|X_i^*|)}{2 E I_f} \frac{A_f}{2 a L} \\ \frac{\sigma_{max,c}}{E} = \frac{p_{max} L M_{max,c}}{E I_c} \gamma_{max,c} = \frac{p_{max} L^2 \cdot M_{max,c}}{E I_c} \frac{A_c}{2 b L} \quad (9)$$

donde  $\gamma_{max}$  es la distancia entre el eje neutro y el eje de la viga o la columna con la tensión máxima y  $a$  y  $b$  la profundidad de la estructura y del pilar respectivamente. El subíndice  $f$  representa el forjado o nivel y  $c$  la columna. También se puede obtener el desplazamiento lateral de cada nivel  $k$   $\delta_{Hk}^*$ . Para ello, se puede seguir el procedimiento de las fuerzas considerando que la estructura unitaria no genera tracciones, cortantes ni flexiones sobre los niveles ( $N_{kf} = 0$ ,  $T_{kf} = 0$  y  $M_{kf} = 0$ ). Además, dado que la fuerza unitaria sólo se aplica sobre un lado de la estructura, las tensiones que provoca sobre la otra parte de la estructura principal son nulas. Considerando los criterios de signo mostrados en la Fig. 1, así como el hecho de que la fuerza se propaga por igual en ambos lados de la estructura, se deduce el desplazamiento adimensional definido en 10:

$$\delta_{Hk}^* = \delta_{Hk} \frac{E_c L_c}{p_{max} L^4} = \frac{1}{p_{max} L^4} \int_0^H \left( \frac{M_p}{2} - \sum_{i=1}^k X_i^* L (s - s_k)^0 \right) (s - s_k) ds + \frac{1}{p_{max} L^4} \int_0^H \frac{T_p T_k}{G \Omega_c L_c} ds \quad (10)$$

donde  $T_p$  y  $M_p$  son, en este caso, la fuerza cortante y el momento flector en la columna derecha de la estructura principal cuando sólo se aplica la carga lateral  $p(s)$ . Es posible implementar software como *Wolfram Mathematica* para resolver el conjunto de ecuaciones en 3 para la  $\delta_{ip}^*$  según 7, que utilizando la expresión matricial correspondiente da como resultado:

$$[\delta] [X^*] + [\delta_p^*] = [0] \quad (11)$$

Los coeficientes de la primera matriz a la izquierda son los coeficientes de influencia de la fuerza unitaria  $C_j$  en el desplazamiento  $i$ . Así, definen el peso relativo de cada variable hiperestática sobre la solución y pueden expresarse en términos de los siguientes parámetros adimensionales:

$$\beta; \beta_1 = \frac{H}{2L}; \beta_2 = \frac{E_c L_c}{G \Omega_c L^2}; \beta_3 = \frac{E_c L_c}{12 E_f I_f}; \beta_4 = \frac{E_c L_c}{G \Omega_c L^2}; \beta_5 = \frac{1}{2} + \frac{L_c}{A_c L^2} \quad (12)$$

Los coeficientes del vector  $[\delta_p]$  y los valores de  $\delta_{Hk}^*$  también pueden escribirse en términos de esos parámetros. A la hora de visualizar mejor los efectos de cada parámetro adimensional, supondremos ahora que cada nivel tiene la misma altura, de modo que  $h_k = H/n$ , siendo  $n$  el número de niveles y el orden de la matriz cuadrada  $[\delta]$ , que ahora puede escribirse como

$$[\delta] = (\beta_3 + \beta_4) [I] + \beta_1 \beta_5 [B(n)] + [D(n)] \quad (13)$$

donde  $[B]$  es una matriz diagonal con  $B_{ij} = (1/n)[n - (i - 1)]$  y  $[D]$  es una matriz con elementos diagonales nulos, los elementos triangulares inferiores son  $n-i$  y los elementos triangulares superiores  $n-j$  con  $i$  representando filas y  $j$  columnas. Ambas matrices son de orden  $n$ . Ahora las ecuaciones 5 y 7 se pueden expresar como:

$$\delta_{ip}^* = -\frac{2t_i \left( -t_i^{2+2\beta} + (3+2\beta)(-1+t_i+(t_i-2)\beta) \right) \beta_3^2}{(1+\beta)(1+2\beta)(3+2\beta)} \\ \delta_{ij}^* = \begin{cases} i \neq j; 2 \frac{\beta_1 \beta_5}{n} (n+1 - \max(i,j)) \\ i = j; 2 \frac{\beta_1 \beta_5}{n} (n+1-i) + \beta_3 + \beta_4 \end{cases} \quad (14)$$

Sin embargo, es necesario un último paso para llegar a una expresión que relacione la flecha lateral adimensional en cada nivel  $\delta_{Hk}^*$  con los parámetros  $\beta_j$  y las reacciones  $X_j^*$  para una carga transversal, tal como se describe en la Ecuación 6. Es decir, debe resolverse la Ec. 10. Una vez alcanzada la solución de 10, se introducen los parámetros  $\beta_j$  para obtener el desplazamiento lateral adimensional. La ecuación 10 puede resolverse siguiendo la regla de Vereshchagin, y finalmente se tiene:

$$\delta_{Hi}^* = A + B \quad (15)$$

En la ecuación 16,  $t_i = 1 - (i-1)/n$ . Una vez resueltas 15 y 16 con las correspondientes  $X_j^*$  obtenidas de 11, se conoce el desplazamiento lateral para cada nivel. Como ejemplo, en la siguiente sección se presenta la solución para una estructura genérica.

### 3. RESULTADOS

Una vez resuelta la Ec. 15, se obtiene la deflexión en cada nivel. Nótese que resolviendo la Ec. 11 se obtienen todos los

$$A = \frac{(2\beta_1)^2 \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 \left( \frac{3(2\beta_1)^2 \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 t_i^{2\beta}}{(2+\beta) + (3+2\beta)} + (2\beta_1)^2 (1+4\beta + 2(1+\beta)\frac{i-1}{n}) - 6t_i^{2\beta} \beta_2 (1 - 2(1+\beta)t_i^{-(2\beta+1)}) \right)}{24(1+\beta)(1+2\beta)}$$

$$B = \left(\frac{\beta_1}{n}\right)^2 \left( \sum_{j=1}^{i-1} (i-j)(i+j-2)X_j^* - \sum_{j=1}^n (i-j+n)(n+j-1)X_j^* + 2(i-1) \left( \sum_{k=1}^n (i-k+n)X_k^* - \sum_{k=1}^{i-1} (i-k)X_k^* \right) \right) \quad (16)$$

esfuerzos sobre el sistema, es decir, tanto la carga lateral aplicada como las variables hiperestáticas  $X_j$ , lo que significa que los momentos flectores son también conocidos. Resolviendo la Ec. 9, se obtienen las tensiones máximas en todos los elementos estructurales. Toda esta información puede obtenerse de forma simbólica, como función de las variables adimensionales  $\beta_r$ . En las secciones siguientes se discutirán varias representaciones gráficas de las mismas, incluyendo la flecha máxima, el desplazamiento vertical, el momento flector y las tensiones como funciones de las variables adimensionales correspondientes. Incluso las derivadas simbólicas de la solución están al alcance, lo que significa que puede analizarse la influencia de cada variable  $\beta_i$  sobre la solución (todas las flechas, tensiones y momentos flectores). Existe sin embargo un caso especialmente interesante, por lo ilustrativa que llega a ser su solución: sin esfuerzos cortantes y  $\beta_5 = 1$ . Nótese que, si  $\Omega_{1c}$  y  $\Omega_{1f}$  son elevados, entonces  $\beta_2$  y  $\beta_4$  tienden a cero. Esta suposición es válida si las deflexiones causadas por los esfuerzos cortantes son mucho menores que las debidas a los esfuerzos flectores. Ahora bien, a partir de su definición en la ecuación (12), se espera que  $\beta_5$  permanezca en valores cercanos a 1. Sin embargo, la forma en que el comportamiento de la estructura depende de su valor puede variar. Aquí resulta muy útil la posibilidad de estudiar las derivadas de la flecha: fijando  $\beta_5 = 1$  y despreciando las flechas debidas a los esfuerzos cortantes, la derivada de la flecha máxima respecto a  $\beta_5$  depende sólo de  $\beta_1$  y  $\beta_3$  y se convierte en un polinomio de grado máximo de  $\beta_1^4$  y  $\beta_3^{-2}$  independientemente de  $n$  y  $\beta$ , es decir, siempre tenderá a infinito con  $\beta_1$  y a cero con  $\beta_3$ . Para valores bajos de  $\beta_3$  y esbelteces altas ( $\beta_1$ ) la flecha lateral depende en gran medida del valor de  $\beta_5$  y, por tanto, suponer un valor de 1 puede no ser exacto. Sin embargo, existe una amplia zona en la que esta suposición sí es posible. Nos quedaremos en esa región a efectos ilustrativos, ya que depender únicamente de dos variables simplifica de hecho la forma de representar la solución: todos los momentos flectores,

tensiones y flechas dependerán exclusivamente de  $\beta_1$  y  $\beta_3$  (para una distribución de cargas y un número de niveles dado).

### 3.1. MOMENTOS FLECTORES

Los momentos flectores pueden obtenerse una vez calculadas las reacciones  $X_j$ . En este subapartado se plantean dos objetivos: conocer la distribución del momento flector en los pilares y analizar el momento flector máximo en función de las dos variables. Definiendo un momento flector máximo adimensional en la base ( $s = H$ ) como:

$$M_{c,max}^* = \frac{M_{c,max}}{p_{max}L^2} \quad (17)$$

se llega a una expresión mucho más sencilla y que sólo depende de dos variables,  $\beta_1$  y  $\beta_3$  para este caso. Ahora la Fig. 2 muestra una distribución de momentos en los pilares y las ecuaciones para el momento flector dimensional y adimensional en la base. Los puntos azules representan la flecha de cada nivel. La distribución del momento flector presenta un cambio de signo, ya que cerca de la parte superior

el momento producido por la  $X_i$  prevalece sobre el producido por la carga lateral. El lugar en que se produce el cambio de signo depende de las variables implicadas. El momento flector máximo, adimensional, mostrado en la Fig. 2 puede representarse entonces como una función de  $\beta_1$  y  $\beta_3$ . La Fig. 2 muestra cómo cambia el momento flector máximo (en general localizado en la base) con las dos únicas variables de las que depende para un tipo de carga dado ( $\beta$ , en este caso, 2/9). Esto lleva a dos conclusiones principales: en general, pero específicamente cuando los esfuerzos cortantes son despreciables y la esbeltez de la estructura es baja, una mayor disminución de dicha esbeltez resultará en menores momentos flectores máximos, y lo mismo ocurrirá cuando disminuya la relación entre la rigidez a flexión en los pilares y las vigas, aunque con una pendiente menor. Obsérvese que  $\beta_1$  representa la relación de esbeltez de la estructura, mientras que  $\beta_3$  representa la relación de rigidez a flexión entre pilares y vigas horizontales, ambas multiplicadas por una constante.

### 3.2. TENSIONES

El mismo enfoque es posible con las tensiones a flexión en pilares y vigas. Definiendo las tensiones adimensionales como en la Ecuación 18, se obtienen las siguientes expresiones a partir de la Ecuación 9:

$$\sigma_{c,max} = \frac{\sigma_{c,max}L_c}{p_{max}L^2\alpha} = \frac{M_{c,max}^*}{2}; \sigma_{f,max} = \frac{\sigma_{f,max}L_f}{p_{max}L\lambda_f} = \frac{\max(|X_i^*|)}{4} \quad (18)$$

La Fig. 3 muestra ambas tensiones en función de  $\beta_1$  y  $\beta_3$ , únicas variables de las

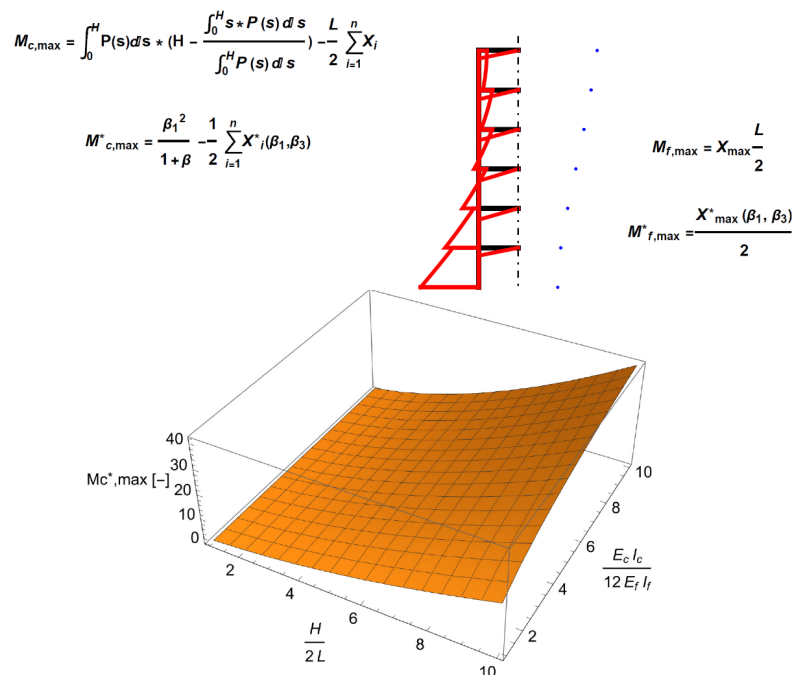


Fig.2. Expresiones del momento flector en el empotramiento y en los forjados, con esquema ilustrativo (arriba). Momento flector en el empotramiento como función de  $\beta_1$  y  $\beta_3$  (abajo).

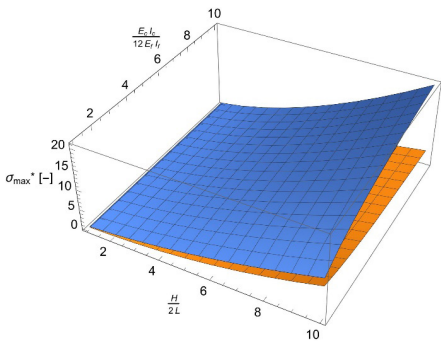


Fig. 3. Tensiones en el empotramiento en función de  $\beta_1$  y  $\beta_3$ .

que dependen en este caso. Se encuentra una tendencia similar a la encontrada para el momento flector máximo.

3.3. DESPLAZAMIENTOS

Por último, las deflexiones laterales se obtienen resolviendo las Ecs. 15 y 16. En este contexto simplificado, sólo dependen de dos variables adimensionales, por lo que pueden representarse en un espacio tridimensional. En general, las Ecs. 15 y 16 dan el desplazamiento lateral para cada nivel, mientras que pueden simplificarse aún más para que sólo den la deflexión lateral máxima, es decir,  $i = 1$ :

$$\delta_{H,max} = \frac{2(9 + 4\beta)\beta_1^2}{3(2 + \beta)(3 + 2\beta)} + \frac{\beta_1^2\beta_2}{1 + \beta} - \left(\frac{\beta_1}{n}\right)^2 \sum_{j=1}^n (1 - j + n)(j - 1 + n)X_j^* \quad (19)$$

En general, la Ec. 19 depende de todas las  $\beta_r$  ya que también lo hacen las  $X_j^*$ . En el caso simplificado, por supuesto, sólo depende de  $\beta_1$  y  $\beta_3$ . También es posible obtener el desplazamiento vertical de cada nivel  $k$ , una vez conocidas las reacciones  $X_r$  mediante el método de las fuerzas como:

$$\delta_{V,k}^* = \frac{\delta_{V,k}EA_c}{hp_{max}L} = \sum_{j=k}^n X_j^* \quad (20)$$

Una vez conocido el desplazamiento vertical en cada lado, se puede calcular fácilmente la inclinación del nivel, sabiendo que el desplazamiento vertical es simétrico en ambos lados de la estructura. Ahora es posible escribir expresiones simbólicas para cualquier número de niveles. La resolución de las ecuaciones propuestas 15 y 16 disminuye significativamente el tiempo de computación requerido para los cálculos simbólicos en comparación con la resolución directa de las integrales. La Fig. 4 muestra la solución simbólica para el desplazamiento horizontal y vertical en la parte superior de una estructura de 1 y 2 niveles bajo carga uniforme antisimétrica, junto con los momentos flectores en el empotramiento.

La solución propuesta incluye cualquier otro tipo de carga o número de ni-

veles, aunque para un mayor número de niveles podría requerirse una cantidad excesiva de memoria de cálculo al trabajar simbólicamente.

4. VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Las ecuaciones 15 y 16 aceleran notablemente el proceso de solución, tanto si el sistema de ecuaciones en 11 puede resolverse numéricamente para un caso particular como simbólicamente, ya que no se necesitan integraciones. La solución es exacta y puede obtenerse con cualquier programa informático capaz de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para validar la solución, se resuelve una población de diez edificios diferentes de 120 plantas utilizando el software estructural STR, desarrollado por STR Ingeniería, y posteriormente utilizando ABAQUS. Esta población está formada por diez edificios de características similares, todos ellos de 120 plantas, pero con diferentes configuraciones de pilares y forjados, con anchos de forjado

y pilares que oscilan entre 0,1 y 2 metros en diferentes combinaciones. Todas las estructuras son de hormigón con un módulo de Young de 2,35E10 MPa y un coeficiente de Poisson de 0,2. La anchura del edificio es de 6 metros y la altura de cada planta es de 3 metros. Así, los edificios objeto de estudio se resuelven numéricamente mediante el método de la flexibilidad. La Fig. 5 muestra las discrepancias medias entre la solución aquí propuesta y la proporcionada por STR. También se muestra la desviación típica para la selección de edificios.

Las discrepancias más notables en los desplazamientos laterales se sitúan en torno al 0,0005%, mientras que existen picos cuando se habla de momentos flectores. Éstos se producen siempre que hay cambios de signo y la solución se aproxima a cero, fenómeno que no ocurre en las deformaciones laterales. El error medio para la flecha lateral en la parte superior es de -9,21E-7% y para el momento flector en el suelo es de 0,000046%. Ahora, para validar también los resultados pro-

	$M_A^* = \beta_1^2 - \frac{\beta_1^3}{3(\beta_3 + \beta_4 + 2\beta_1\beta_5)}$ $M_B^* = -\frac{\beta_1^3}{3(\beta_3 + \beta_4 + 2\beta_1\beta_5)}$	$\delta_{V,max}^* = \frac{2\beta_1^2}{3(\beta_3 + \beta_4 + 2\beta_1\beta_5)}$ $\delta_{H,max}^* = \beta_1^4 + \beta_1^2\beta_2 - \frac{2\beta_1^5}{3(\beta_3 + \beta_4 + 2\beta_1\beta_5)}$
	$M_A^* = \beta_1^2 + \frac{\beta_1^3(-15(\beta_3 + \beta_4) - 7\beta_1\beta_5)}{24((\beta_3 + \beta_4)^2 + 3\beta_1(\beta_3 + \beta_4)\beta_5 + \beta_1^2\beta_5^2)}$ $M_B^* = \frac{-\beta_1^3\left(\frac{\beta_3}{3} + \frac{\beta_4}{3} + 0.04167\beta_1\beta_5\right)}{\beta_1^2 + 2\beta_3\beta_4 + \beta_4^2 + 3\beta_1\beta_3\beta_5 + 3\beta_1\beta_4\beta_5 + \beta_1^2\beta_5^2}$ $M_{B,BC}^* = \frac{\beta_1^3(0.2917\beta_3 + 0.2917\beta_4 + 0.25\beta_1\beta_5)}{\beta_1^2 + 2\beta_3\beta_4 + \beta_4^2 + 3\beta_1\beta_3\beta_5 + 3\beta_1\beta_4\beta_5 + \beta_1^2\beta_5^2}$ $M_{B,BE}^* = 0.0625$ $M_{B,AB}^* = M_{B,BE}^* - M_{B,BC}^*$	$\delta_{H,max}^* = \beta_1^2(\beta_1^2 + \beta_2) + \frac{\beta_1^5(-53(\beta_3 + \beta_4) - 22\beta_1\beta_5)}{48((\beta_3 + \beta_4)^2 + 3\beta_1(\beta_3 + \beta_4)\beta_5 + \beta_1^2\beta_5^2)}$ $\delta_{V,max}^* = \frac{\beta_1^2(23(\beta_3 + \beta_4) + 8\beta_1\beta_5)}{12((\beta_3 + \beta_4)^2 + 3\beta_1(\beta_3 + \beta_4)\beta_5 + \beta_1^2\beta_5^2)}$

Fig. 4. Solución simbólica para estructuras de 1 y 2 niveles bajo carga uniforme antisimétrica, junto con los momentos flectores a nivel del suelo.

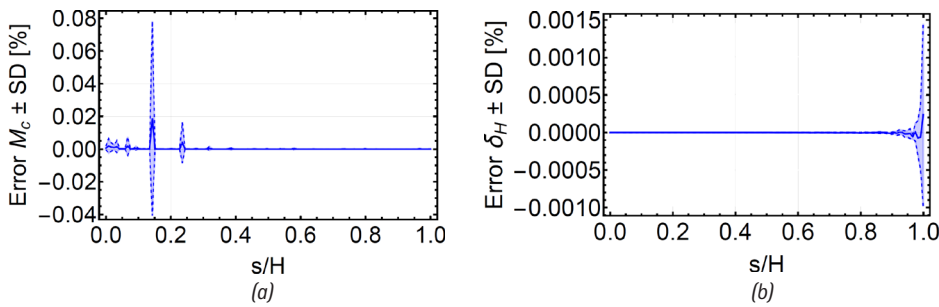


Fig. 5. (a) Error entre el software numérico STR y la solución propuesta para el desplazamiento lateral y para el momento flector (b). Ambos se muestran como el error medio máximo para cada elemento en la población seleccionada. La desviación típica SD se muestra en línea discontinua.

puestos obtenidos mediante el método introducido, la misma población de diez edificios se ha modelado completamente en ABAQUS utilizando elementos de viga 2D para las vigas y los pilares. La Fig. 6 muestra los resultados medios obtenidos junto con la desviación típica.

Aquí se obtiene un error medio en la parte superior del edificio del 0,0038%, mientras que aumenta sistemáticamente al acercarse a las plantas inferiores, que sufren una deflexión lateral menor, mientras que el error medio es del 0,016%, sin llegar nunca a superar el 0,15%, un resultado notablemente bueno si se compara con un software general como ABAQUS. Todos los cálculos se realizan considerando los esfuerzos cortantes.

### 5. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un modelo adimensional basado en el método de las fuerzas para resolver analíticamente el desplazamiento lateral de una estructura de barras sometida a cargas laterales antisimétricas, con especial atención a las distribuciones potenciales de carga, comunes en muchos casos. Tras definir los parámetros adimensionales que describen el comportamiento del sistema, se alcanza una solución simbólica que se utiliza para predecir los desplazamientos laterales y verticales de cada nivel, y las tensiones y momentos flectores máximos en los pilares para una estructura general. El modelo no

sólo permite obtener una solución computacionalmente rápida y muy aproximada para cualquier edificio o estructura tipo torre si su esquema constructivo puede adaptarse al modelo aquí presentado, sino que también proporciona una solución simbólica adimensional que puede ayudar a predecir rápidamente los resultados en función de cada parámetro de diseño y carga. Unos tiempos de cálculo más rápidos implican una solución más eficiente y respetuosa con el medio ambiente. Analizar la influencia de cada parámetro en el comportamiento de la estructura bajo carga también es posible y sencillo, dado el corto tiempo de cálculo necesario para obtener una solución numérica para cada caso gracias a la solución dada. Se presentó un caso simplificado para resaltar la conveniencia de disponer de una solución simbólica para desplazamientos y tensiones: con sólo observar las gráficas correspondientes, se puede predecir cómo variarán los resultados con las pocas variables simbólicas de las que depende todo el sistema. También se introdujeron varios resultados, mostrando las tendencias generales que sigue la estructura propuesta con las variables involucradas, junto con una solución explícita para estructuras con uno y dos niveles bajo carga uniforme. La solución de forma cerrada para estructuras con mayor número de plantas puede resultar poco útil, dado lo mucho que crecen en complejidad las expresiones simbólicas resultantes. La solución propuesta permite el estudio de múltiples estructuras similares a edificios, incluyendo estructuras 3D de base rectangular o cuadrada que pueden analizarse como una estructura equivalente como en la figura 1, si la carga aplicada permanece en el mismo plano. Aunque en este trabajo sólo se han considerado cargas antisimétricas, la solución puede servir de puente para resolver problemas con configuraciones de carga más complejas, como cargas simétricas o no simétricas.

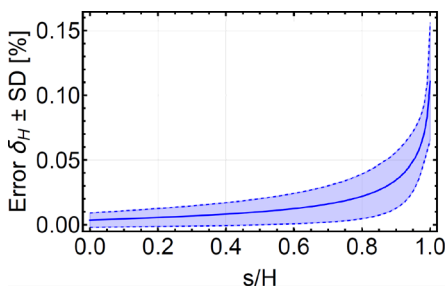


Fig. 6. Error entre los resultados proporcionados por ABAQUS y el modelo propuesto para el desplazamiento lateral, mostrando tanto los errores medios como la desviación típica SD.

### REFERENCIAS

- [1] M. M. Ali, K. S. Moon, Structural developments in tall buildings: Current trends and future prospects, *Architectural Science Review* 50 (3) (2007) 205–223. Doi: <https://doi.org/10.3763/asre.2007.5027>.
- [2] G. Platt, X.-S. Yang, A. Silva Neto, *Computational Intelligence, Optimization and Inverse Problems with Applications in Engineering*, (2019). Doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-96433-1>.
- [3] K. Zalka, A simple method for the deflection analysis of tall wall-frame building structures under horizontal load, *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 18 (2009) 291 – 311. Doi: <https://doi.org/10.1002/tal.410>.
- [4] J. Lee, M. Bang, J.-Y. Kim, An analytical model for high-rise wall-frame structures with outriggers, *The Structural Design of Tall and Special Buildings* 17 (2008) 839 – 851. Doi: <https://doi.org/10.1002/tal.406>.
- [5] A. Nadjai, D. Johnson, Elastic and elastoplastic analysis of planar coupled shear walls with flexible bases, *Computers and Structures* 68 (1998) 213–229. Doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(98\)00036-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00036-4).
- [6] K. Koohestani, Structural reanalysis via force method, *International Journal of Solids and Structures* 136–137 (2018) 103–111. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.12.008>.
- [7] R. Sedaghati, A. Suleman, B. Tabarrok, Structural optimization with frequency constraints using the finite element force method, *Aiaa Journal - AIAA J* 40 (2002) 382–388. doi:10.2514/2.1657.
- [8] K. Spiliopoulos, Force method - based procedures in the limit equilibrium analysis of framed structures, *Limit States of Materials and Structures: Direct Methods* (2009) 233–252. Doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9634-1-12>.
- [9] A. Tena-Colunga, H. Hernández-Ramírez, Resilient seismic design of steel frames with hysteretic fuses in a code-oriented format, *Journal of Building Engineering* (2020) 101768. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.job.2020.101768>.